

2019年天津和平区天津市耀华中学高三一模理科数学试卷

一、选择题（本大题共8题，每小题5分，共计40分）

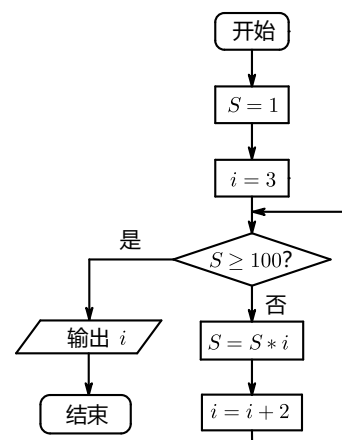
1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$, $B = \{x | (x-3)(x+1) \geq 0\}$, 则 $(\complement_U B) \cap A =$ ().

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, -1] \cup (0, 3)$
C. $(0, 3]$ D. $(0, 3)$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x-y \leq 0 \\ 2x-y \leq 4 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 2x + 3y$ 的最小值为 ().

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

3. 已知如右程序框图, 则输出 i 的是 ().



- A. 9 B. 11 C. 13 D. 15

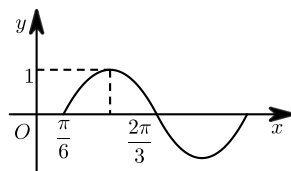
4. 设 a, b 都是不等于1的正数, 则 " $3^a > 3^b > 3$ " 是 " $\log_a 3 < \log_b 3$ " 的 ().

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 满足条件 $y = f(x+1)$ 是偶函数, 且当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$, 则 $a = f(\log_3 2)$, $b = f\left(-\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\right)$, $c = f(3)$ 的大小关系是 ().

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

6. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$) ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 如果 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) =$ () .



- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若双曲线 C 上存在一点 P , 使得 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, 且 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{7}{8}$, 则双曲线的离心率为 () .

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ 或 3 D. $\frac{4}{3}$ 或 2

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - x - a - 2$ 有零点 x_1, x_2 , 函数 $g(x) = x^2 - (a+1)x - 2$ 有零点 x_3, x_4 , 且 $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\frac{9}{4}, -2\right)$ B. $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ C. $(-2, 0)$ D. $(1, +\infty)$

二、填空题 (本大题共6题, 每小题5分, 共计30分)

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若复数 $\frac{2+bi}{1-i} = ai$, 则 $a+b =$ _____ .

10. 设 $a = \int_0^2 x dx$, 则二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - ax\right)^5$ 展开式中含 x^2 项的系数是 _____ .

11. 三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E 分别为 PB, PC 的中点, 记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1 , $P-ABC$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1:V_2 =$ _____ .

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = a + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 若直线 l 与圆 C 相切, 则实数 $a =$ _____ .

13. 若正实数 a, b 满足 $(2a+b)^2 = 1+6ab$, 则 $\frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 _____ .

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 满足 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 且对于边 AB 上任意一点 N , 恒有 $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} \geq \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$. 则 $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____ .

三、解答题（本大题共6题，共计80分）

15. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对边 $a = \sqrt{19}$, 角 B 所对边 $b = 5$, 若 $f(A) = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 在盒子里有大小相同, 仅颜色不同的乒乓球共10个, 其中红球4个, 白球3个, 蓝球3个.

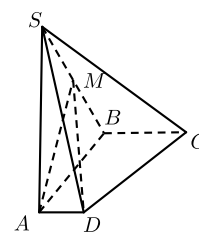
(1) 现从中任取出一球确定颜色后放回盒子里, 再取下一个球. 重复以上操作, 最多取3次, 过程中如果取出蓝色球则不再取球. 求:

1 最多取两次就结束的概率.

2 整个过程中恰好取到2个白球的概率.

(2) 若改为从中任取出一球确定颜色后不放回盒子里, 再取下一个球. 重复以上操作, 最多取3次, 过程中如果取出蓝色球则不再取球. 则设取球的次数为随机变量 ζ , 求 ζ 的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, 侧棱 $SA \perp$ 底面 $ABCD$, AB 垂直于 AD 和 BC , $SA = AB = BC = 2$, $AD = 1$, M 是棱 SB 的中点.



(1) 求证: $AM \parallel$ 平面 SCD .

(2) 求二面角 $S - CD - M$ 的正弦值.

(3) 在线段 DC 上是否存在一点 N , 使得 MN 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{7}$, 若存在, 请求出 $\frac{DN}{DC}$ 的值, 若不存在, 请说明理由.

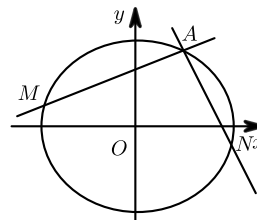
18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点, 过点 A 作两条直线 l_1, l_2 , 它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点, 其分别交圆于点 M, N .



(1) 若 $A(-2, 0)$, 求直线 l_1, l_2 的方程.

(2) 解答下列各题

- 1 求证: 对于圆上的任意点 A , 都有 $l_1 \perp l_2$.
- 2 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

(2) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 求 k 的最大值.

(3) 当 $n > m \geq 4$ 时, 证明: $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.